Муниципальный этап Всероссийской олимпиады шольников по математике

Разбор решения задач олимпиады

7 класс

Задание7.1

Решение.

Все 9 шариков расположить в ряд требуемым образом не получится. Это следует из того, что у шариков с числами 5 и 7 может быть только один сосед – шарик с числом 1. Значит, оба шарика 5 и 7 должны лежать с краев, а шарик с единицей должен соседствовать с каждым из них, что невозможно. Выбрать 8 шариков и разложить их в ряд согласно требованиям задачи можно, например, так: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

Ответ. Все 9 шариков разложить нельзя. Можно разложить в ряд 8.

Задание7.2

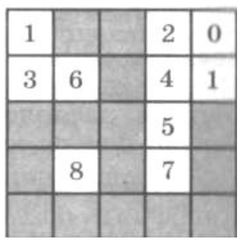
Решение.

Из условия следует, что каждый из велосипедистов ехал в то время, когда двое других стояли, и, кроме того, в каждый момент времени кто-то из велосипедистов ехал (первый ехал, когда второй и третий стояли). Раз они проехали одинаковое расстояние, а отношение их скоростей равно 3 : 4 : 6, то время движения первого велосипедиста – 4 части, второго – 3 части, третьего – 2 части всего времени (все время составляет 9 частей). Всего они ехали 3 часа = 180 минут. Значит, одна часть времени составляет 20 минут. Следовательно, первый ехал 80 минут, то есть $\frac{4}{3}$ часа. За это время он проехал $12 \cdot \frac{4}{3} = 16$ (км).

Ответ. 16 км.

Задание7.3.

Решение.



Идея закрашивания (см. рисунок) квадрата основана на том, что вначале нужно выделить квадрат 3х3, центральная клетка которого граничит с 8 закрашенными клетками, и понять, что этот квадрат может стоять только в углу квадрата 5х5

Задание 7.4.

Решение.

Если Артема опередили x участников, то он опередил 2x участников, т.е. всего участников без Артема будет 3x. Значит, количество участников без одного делится на 1 + 2 = 3. Аналогично, количество участников без одного делится на 1 + 3 = 4, т.е. количество участников без одного должно делиться на 12. Наименьшее такое число – 12. Но если участников на 12 + 1 = 13, то Артема опередят четверо ребят, Дениса – трое и Аня не сможет «вклиниться» между ними. Если участников 1 + 2 · 12 = 25, то Артема опередят 8 ребят, Дениса – 6 ребят, значит, Аню опередят 7 ребят. Если же участников больше, то между Артемом и Денисом в турнирной таблице будет, по крайней мере, двое участников.

Ответ: восьмое.

Задание7.5.

Решение.

Ответы первого и второго различны, поэтому вариант П и П невозможен. Также невозможен и вариант Л и Л, так как числа 1001 и 1000 отличаются на 1, а ответы лжецов по поводу количества Л должны были либо совпадать, либо отличаться на 4. Вариант 1 – П, 2 - Л также невозможен, так как в этом случае на острове проживает 1003П, и , значит, Л не мог дать ответ 999П. Остается вариант 1 – Л, 2 – П. Из ответа 2 получаем 1000Л и 1000П, что соответствует ответу 1.

Ответ. Первый – лжецом, второй – правдолюбцем. На острове 1000Л и 1000П.

8класс

Задание8.1.

Решение. Пусть Таня решила x задач, тогда ей осталось решить $\frac{x}{2}$ задач.

Пусть t_1 – промежуток времени, после которого Таня и Коля оценили доли решенных и оставшихся для решения задач, t_2 – оставшееся время. Так как скорость решения задач Таней постоянна, то $t_2 = t_1 \cdot \frac{1}{2}$, т.е. $\frac{t_1}{t_2}=2$.

Тогда Коля решил $\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$ задач, и ему осталось решить $x+\frac{x}{2}-\frac{x}{6}=\frac{8x}{6}=\frac{4}{3}x$ задач.

Его скорость была равна $\frac{x}{6t_1}$, а должна стать равной $\frac{4x}{3t_2}$.

Отношение скоростей равно $\frac{4x\cdot 6t_1}{3t_2\cdot x}=\frac{8t_1}{t_2}=16$.

Ответ: 16.

Задание 8.2.

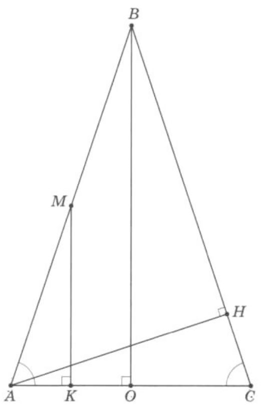
Решение.

Предположим, что последний пятый участник выиграл во всех партиях. В каждой партии один из борцов выигрывает, другой – проигрывает. Поэтому, количество побед должно равняться количеству поражений. Из высказываний первых четырех ребят следует, что у них побед на 6 меньше, чем поражений. Значит, количество побед пятого участника должно равняться 6 (он не проигрывал). Но количество его побед должно делиться на 4, так как, по его утверждению, он одержал равное количество побед над каждым из соперников, а 6 на 4 не делится. Противоречие.

Ответ. Не мог.

Задание 8.3.

Решение.



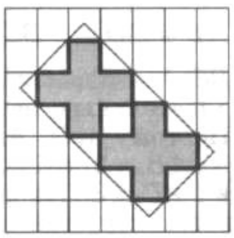
Треугольник ABC – равнобедренный, значит, ∠MAK = ∠ACH. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами MK = AH и равными противолежащими острыми углами). Значит, AC = AM = $\frac{1}{2}$AB. Проведем высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса AK : KO = AM : MB, значит, AO = 2 AK = 2a. Тогда AC = 2 AO = 4a, AB = 2 AC = 8a. Значит, периметр равен
P = 8a + 8a + 4a = 20a.

Ответ: 20a.

Задани8.4.

Решение

См. рисунок.



Нарисованный прямоугольник состоит из 11 полных квадратов 1x1, 8 половинок и 4 четвертинок квадратиков, поэтому его площадь равна $11 + 8 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 16$.

Ответ. Можно.

Задание 8.5.

Решение.

Рассмотрим шахматную раскраску 10x10. Заметим, что из белой клетки своим ходом хромая ладья попадает в черную, а из черной клетки – в белую. Пусть ладья начала обход с белой клетки. Тогда 1 будет стоять в белой клетке, 2 – в черной, 3 – в белой, …, 100 – в черной, т.е. в белых клетках будут стоять нечетные числа, а в черных – четные. Но из двух соседних по стороне клеток одна черная, а другая белая, т.е. сумма чисел, записанная в этих клетках, всегда будет нечетной, а значит, не будет делиться на 4.

Ответ. Не могло.

9класс

Задание 9.1.

Решение.

Для того, чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того, чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5. (2 способа).
Теперь на оставшиеся пять мест нужно расставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 9. Для этого выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберем так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, …, 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом (например, если сумма всех цифр, кроме последней равна 50, то в качестве последней цифры выбираем 4, чтобы итоговая сумма цифр делилась на 9).
Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 13122$ способа.

Ответ: 13122.

Задание 9.2.
<u>Решение 1.</u>
1. Перенесем все в правую часть
$(x + c)(x + d) – (2x + c + d) = 0$,
$x^2 + cx + dx + cd – 2x – c – d = 0$,
$x^2 + (c + d – 2) x + cd – c - d = 0$.
Находим дискриминант квадратного уравнения
$D = (c + d – 2)^2 - 4 (cd – c – d) = c^2 + d^2 + 4 + 2cd – 4c – 4d - 4 cd + 4c + 4 d =$
$= c^2 + d^2 - 2 cd + 4 = (c – d)^2 + 4 > 0$ Значит, уравнение имеет два различных корня.
<u>Решение 2.</u> Рассмотрим $f (x) = (x + c) (x + d) – (2x + c + d)$, тогда уравнение из условия примет вид $f (x) = 0$. Заметим, что $f (– c) = c – d$ и $f (– d) = d – c$. Так как $c \neq d$, в одной из этих точек значение этого приведенного трехчлена отрицательно. Значит, у квадратного трехчлена есть ровно два корня.
Замечание. В первом решении не используется условие $c \neq d$.

Задание 9.3.
<u>Решение.</u> Пусть длина первого прыжка паука-скакуна равна d, и после n прыжков он вернулся в начальную точку. Тогда его путь – замкнутая ломаная $A_1A_2A_3 \ldots AnA_1$ со звеньями длины d, 2d, 4d,…2^{n-1} d. Такая ломаная не существует, так как длина одного её звена больше суммы длин других звеньев: $2^{n-1} d > d + 2d + \ldots + 2^{n-2} d$ (поскольку $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-2} < 2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-2} = 4 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-2} = \ldots = 2^{n-1}$, что противоречит.

Ответ. Не сможет.

Задание 9.4.

<u>Решение.</u>
Так как CC' - диаметр окружности, то $\angle C'AC = 90^0$.
Поскольку $MP \parallel BC$, получаем, что $\angle MPA = \angle BCA = \angle BAC$. Значит, треугольник AMP – равнобедренный и поэтому его высота MD является и медианой. Так как $AD = DP$ и $AC' \parallel DM$, по теореме Фалеса получаем, что $C'M = MP$.
<u>Замечание</u>. Есть и другие решения, например, с использованием подсчета углов в прямоугольном треугольнике PAC'; именно, $\angle MAC' = 90^0 - \angle MAP = 90^0 - \angle ACB = 90^0 - \angle MPA = \angle MC'A$, откуда $MP = MA = MC'$.

Заданий 9.5.

Решение. Выигрывает тот, после чьего хода в коробках не осталось карточек. Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Первым ходом он берет из второй коробки 2 карточки, а дальше добивается того, чтобы после каждого его хода разность количества карточек в коробках делилась на 3. Тогда после каждого хода второго разность количества карточек в коробках не будет делиться на 3 (в частности, число карточек в коробках будет разным), поскольку она будет меняться на 1 или на 2.

Покажем, как первому добиться того, чтобы после каждого его хода разность количества карточек в коробках, делилась на 3. После первого его хода разность равна 98 – 20 = 78. Пусть после второго хода в коробках осталось a и b карточек ($a > b$, $a – b = 3k + d$, $d = 1$ или $d = 2$). Тогда первому достаточно взять d карточек из коробки с a карточками. А так как суммарное число карточек в коробках после каждого хода уменьшается, то после какого-то хода первого в обеих коробках не останется карточек и он выиграет.

Ответ: Первый.

10 класс

Задание10.1.

Решение.

Предположим, что такое число существует. Так как остатки при делении на 8 цифр различные числа от 1 до 8, то цифры и восьмизначного числа различные. Далее, если число даёт остаток 8 при делении на цифру, то эта цифра 9. Значит, последняя цифра числа равна 9. Аналогично, если число даёт остаток 7 при делении на цифру, эта цифра 8 или 9. Но 9 уже стоит на последнем месте; поэтому предпоследняя цифра – 8. Рассуждая аналогично, получим, что наше число должно быть равно только 23456789. Однако это число, например, при делении на третью цифру (4) даёт остаток 1, а не 3. Замечание. Также число 23456789 даёт остаток 5 (а не 7) при делении на 8.

Ответ. Такого числа найти нельзя.

Задание10.2.

Решение.

$$\frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}=15,$$

$$\frac{b_3+b_4+b_5+b_6}{4}=60$$

$b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = b_1q^2 + b_2q^2 + b_3q^2 + b_4q^2 = (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)\, q^2$, где q – знаменатель прогрессии,
т.е. $60 = 15 \cdot q^2$, $q = \pm 2$

Из равенства

$$\frac{b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3}{4}=15$$ следует,

что $b_1 (1+q +q^2+q^3) = 60$,

значит, при q = 2, $b_1=\frac{60}{1+2+4+8} = 4$,

а при q = - 2, $b_1=\frac{60}{1-2+4-8} = -12$,

В первом случае $b_6 = 4 \cdot 2^5 = 4 \cdot 32 = 128$, во втором $b_6 = -12 \cdot (-2)^5 = -12 \cdot (-32) = 384$

Ответ: 128 или 384.

Задание10.3.

Решение.

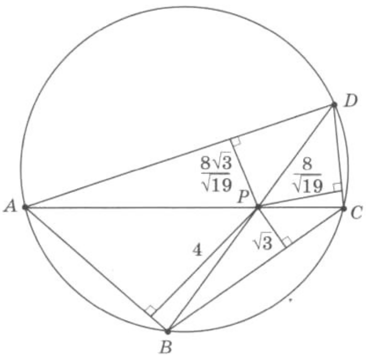
Поскольку с момента встречи первых вагонов до момента разъезда пятнадцатых вагонов прошло 28 + 32 = 60 с, очередные вагоны с одинаковыми номерами разъезжались через каждые 60 : 15 = 4 с. Поэтому через 28с только что разъехались седьмые вагоны поездов, то есть 7-й вагон одного поезда поравнялся с 8 вагоном другого. В этот момент третий вагон, в котором ехал Александр, поравнялся с вагоном 8 + (7 – 3) = 12, в котором ехал Сергей.

Ответ: 12.

Задание 10.4.

Решение.

а) Так как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, то ∠PBC=∠PAD, ∠PCB=∠PDA.



Следовательно, треугольники PBC и PDA подобны. Аналогично доказывается, что треугольники ABP и DCP подобны. Соответствующие элементы подобных фигур относятся, как коэффициент подобия. В данном случае в качестве соответствующих элементов выступают высоты, проведённые из вершины P.

Отсюда находим, что коэффициент подобия равен $k_1 = \frac{\sqrt{19}}{8}$ для первой пары и $k_2 = \frac{\sqrt{19}}{2}$ для второй пары.

Пусть AP = 8x. Тогда $BP = AP \cdot k_1 = x\sqrt{19}$; $CP = \frac{BP}{k_2} = 2x$,

$DP = \frac{AP}{k_2} = \frac{16x}{\sqrt{19}}$. Значит, AP : PC =8x : 2x = 4 : 1

б) Если AC = 10, то 8x + 2x = 10, x = 1. Следовательно $BD = BP + DP = \frac{35}{\sqrt{19}}$.

Ответ: а) AP: PC = 4, б) BD = $\frac{35}{\sqrt{19}}$.

Задание 10.5.

Решение.

Покажем, что разность между количеством вирусов двух разных типов будет сохранять свою четность, например, разность между количеством вирусов типов А и С будет четной. Изначально эта разность четна. Если в какой-то момент внедрились друг в друга вирусы типов А и С, то количество вирусов каждого из типов А и С уменьшилось на 1, а разность не изменилась. Если же в какой-то момент внедрились друг в друга вирусы типов А и В, то получился вирус типа С, количество вирусов типа А уменьшилось на 1, а типа С увеличилось на 1 и разность изменилась на 2, т.е. осталась четной. Если в какой-то момент внедрились друг в друга вирусы типов С и В, то разность также изменится на 2, т.е. останется четной. Аналогично показываем, что разность между количеством вирусов типов А и В и разность между количеством вирусов типов С и В будет нечетной.

Если бы в итоге образовался вирус типа А, то разность между количеством вирусов типов А и С будет равна 1 – числу нечетному, а она должна быть чётной. Аналогично не мог образоваться и вирус типа С. Поэтому в итоге получится вирус типа В.

Ответ: тип В.

11 класс

Задание11.1.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению

$Z^5 - Z^4 - 2011Z^3 + 2010\,Z^2 - 2012Z + 2011 = 0$

$Z^3\,(Z^2+1) - Z^2\,(Z^2+1) - 2012Z\,(Z^2+1) + 2011\,(Z^2+1) = 0$

$(Z^2+1)\,(Z^3 - Z^2 - 2012Z + 2011) = 0$

Действительные корни исходного уравнения совпадают с действительными корнями многочлена $f\,(Z) = Z^3 - Z^2 - 2012Z + 2011 = 0$.

Так как $f\,(-100) = -10^6 - 10^4 + 201200 + 2011 < 0$,

$f\,(0) = 2011 > 0$,

$f\,(1) = -1 < 0$

$f\,(100) = 10^6 - 10^4 - 201200 + 2011 > 0$, то уравнение $f\,(Z) = 0$ (так же как и исходное уравнение) имеет ровно три действительных корня $Z_1, Z_2, Z_3.$

По теореме Виета

$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1$

$Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3 = -2012$, откуда

$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2 - 2\cdot(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3) = 1 - 2\cdot(-2012) = 1 + 4024 = 4025.$

Ответ: 4025.

Задание 11.2.

Решение.

Обозначим P(n) количества n-буквенных слов. Получаем P(1) = 1 (слово У),
P(2) = 0, P(3) = 1 (словоYZY), P(4) = 1 (словоYZZY), P(5) = 1 (словоYZYZY),
P(6) = 2 (словоYZZYZY и YZYZZY).

Дальнейший прямой подсчет становится громоздким. Получить P(7), P(8), P(9) можно, но чем больше n, тем требуется больше времени.

Но можно заметить следующее. Так как из любого слова новое слово образуется добавлением справа либо двух букв ZY, либо трёх букв ZZY, то должно выполняться равенство P(n) = P(n -3) + P(n-2).
Тогда получаем:
P(7) = P(4) + P(5) = 1 + 1 = 2,
P(8) = P(5) + P(6) = 1 + 2 = 3,
P(9) = P(6) + P(7) = 2 + 2 = 4,
P(10) = P(7) + P(8) = 2 + 3 = 5,
P(11) = P(8) + P(9) = 3 + 4 = 7,
P(12) = P(9) + P(10) = 4 + 5 = 9,
P(13) = P(10) + P(11) = 5 + 7 = 12,
P(14) = P(11) + P(12) = 7 + 9 = 16,
P(15) = P(12) + P(13) = 9 + 12 = 21,
P(16) = P(13) + P(14) = 12 + 16 = 28,
P(17) = P(14) + P(15) = 16 + 21 = 37,
P(18) = P(15) + P(16) = 21 + 28 = 49,
P(19) = P(16) + P(17) = 28 + 37 = 65,
P(20) = P(17) + P(18) = 37 + 49 = 86.
Возможны и другие способы решения.
Например, рассмотрим, вместо 20-буквенного слова, соответствующее
19-буквенное слово, образующееся из 20 буквенного слова вычеркиванием последней буквы Y. Проанализировав условие задачи, заметим, что любое такое слово состоит из m двухбуквенных наборов YZ и n трехбуквенных наборов YZZ. При этом 2 m + 3 n = 19.
Решение данного уравнения в целых числах имеет вид m = 5 – 3k, n = 3 + 2 k, k – целое число, что приводит к трём решениям в натуральных числах (m; n) : (2; 5), (5; 3), (8; 1).
С учетом перестановок каждое из этих решений соответственно дает: $\frac{7!}{2!\cdot 5!}=21$ слово,
$\frac{8!}{3!\cdot 5!}=56$слов, , $\frac{9!}{8!\cdot 1!}=9$ слов. Итого: 21 + 56 + 9 = 86 слов.

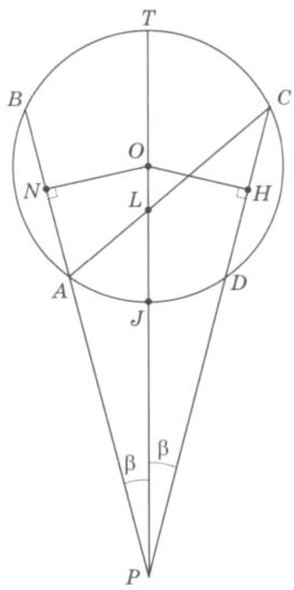
Ответ: 86.

Задание11.3.

<u>Решение.</u>
Предположим, что $m \neq n$. Всего в турнире с участием 73 теннисистов проводится
$\frac{73\cdot 72}{2}$ = 36 · 73 игр. Пусть x теннисистов одержали по n побед, а остальные (73 – x)
теннисистов – по m побед. Тогда получаем равенство
x · n + (73 – x) m = 36 · 73, откуда x (n - m) = (36 – m) · 73.
Число 73 – простое, поэтому на него делится либо сомножитель x, либо сомножитель (n - m).
Первое невозможно, так как 0 < x < 73. А второе невозможно, так как n < 73,
m < 73, следовательно, $0 < |n-m| < 73$.
Противоречие. Значит, условие $m \neq n$ не могло выполняться.

Ответ: числа m и n не могут быть различными.

Задание11.4.



<u>Решение.</u>

Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до этих хорд тоже равны, поэтому ON = OH. Прямоугольные треугольники POH и PON равны по катету (ON = OH) и гипотенузе (OP – общая сторона), значит, PH = PN, ∟NPO = ∠HPO, т.е. PO – биссектриса угла BPC. В равнобедренном треугольнике AOB (AO = OB – радиусы одной окружности) ON – высота, по свойству равнобедренного треугольника ON – медиана, т.е. BN = NA = 2. Аналогично, CH = HD = 2, т.е. AN = DH =2. Отсюда следует, что AP = PD = x.

Так как PL – биссектриса треугольника APC, то $\frac{PA}{PC}=\frac{AL}{LC}$, то есть $\frac{x}{x+4}=\frac{2}{3}$, 3x = 2x + 8, x = 8. Ответ: 8.

Ответ: AP = 8.

Задание11.5.

<u>Решение.</u>

Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый игрок первым ходом взял 1 камень из какой-нибудь кучки, то второму следует взять по 1 камню из двух других кучек. Если же первый игрок первым ходом взял по 1 камню из каких-то двух кучек, то второму следует взять 1 камень из оставшейся кучки. Таким образом, после хода второго в первой кучке будет лежать 6 камней, во второй – 8 камней, в третьей – 10 камней, т.е. в каждой кучке будет лежать четное число камней. Каждым следующим ходом второй должен брать столько же камней и из тех же кучек, что и первый, т.е. после каждого хода второго в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Второй всегда сможет сделать ход, так как после хода первого в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, т.е. хотя бы по одному. А так как второй всегда сможет сделать ход, то именно он заберет последние камни из кучек и выиграет.

Ответ: Выигрывает второй.